

**Examenul național de bacalaureat 2023**

**Proba E. c)**

**Matematică *M\_șt-nat***

**Varianta 1**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că  $4 - 6\sqrt{3} + 3(2\sqrt{3} - 1) = 1$ .
- 5p** 2. Se consideră funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 5x - 3$  și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 2x + 3$ . Determinați numărul real  $a$  pentru care  $f(a) = g(a)$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{2x+1} \cdot 2^3 = 1$ .
- 5p** 4. Determinați câte numere naturale, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulțimea  $A = \{3, 4, 5, 6\}$ .
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(4, 0)$ ,  $B(0, 2)$ ,  $C(3, 3)$  și  $M$ , mijlocul segmentului  $AB$ . Arătați că segmentele  $MO$  și  $MC$  au lungimile egale.
- 5p** 6. Se consideră  $E(x) = 2 \sin x \sin 2x - \cos x$ , unde  $x$  este număr real. Arătați că  $E\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $A(a) = \begin{pmatrix} 3+a & 2-2a \\ 1-a & 1+3a \end{pmatrix}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(0)) = 1$ .
- 5p** b) Arătați că  $A(0) \cdot (A(a) - A(0)) = aI_2$ , pentru orice număr real  $a$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $\det(A(a^2) - aA(a)) \geq 0$ , pentru orice număr real  $a$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = x^2 - 4xy + 3y^2$ .
- 5p** a) Arătați că  $0 \circ 2 = 12$ .
- 5p** b) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $(2x) \circ x = -1$ .
- 5p** c) Determinați perechile  $(m, n)$  de numere întregi, cu  $m < n$ , pentru care  $m \circ n = 3$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 5 + \frac{4x-4}{x^2}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{4(2-x)}{x^3}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $|f(x) - f(y)| \leq 1$ , pentru orice  $x, y \in [1, +\infty)$ .
2. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x^2 + 4 \ln x$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_1^2 (f(x) - 4 \ln x) dx = 7$ .
- 5p** b) Arătați că  $\int_1^e x(f(x) - 3x^2) dx = e^2 + 1$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $\int_1^{\sqrt{e}} f(x) F''(x) dx = \frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$ , pentru orice primitivă  $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  a funcției  $f$ .