Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=3+i$. Arătați că $z(z-2i)=10$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x+1$. Arătați că $f(2x)-2f(x)=-1$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^3-2x+2}=x$.

5p **4.** Se consideră mulțimea A, a numerelor naturale de două cifre. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea A, numărul $n+5$ să fie multiplu de 10.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,0)$ și $B(5,4)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul O și este paralelă cu dreapta AB.

5p **6.** Se consideră triunghiul isoscel ABC, dreptunghic în A, cu aria egală cu 4. Arătați că $BC=4$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & a\\ a & a+1 & -2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+y+2z=2\\ x-y+az=4\\ ax+(a+1)y-2z=a\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=8$.

5p **b)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a=-2$, arătați că $x_0z_0+y_0=-2$, pentru orice soluție (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuații.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+\left(2^x-2\right)\left(2^y-2\right)$.

5p **a)** Arătați că $2\circ 3=18$.

5p **b)** Arătați că $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Demonstrați că $x\circ(-x)\le 1$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3\ln\frac{x+3}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x^2+2x-15}{(x-1)(x+3)}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că $\ln\frac{x+3}{3(x-1)}\ge 1-\frac{x}{3}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+2x\right)e^{-x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 f(x)e^x\,dx=18$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+2}dx = \frac{e-2}{e}$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt\right) = 1$.