

**Examenul național de bacalaureat 2023**

**Proba E. c)**  
**Matematică  $M\_mate-info$**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianta 1**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$z(z-2i) = (3+i)(3-i) = 3^2 - i^2 =$ $= 9 + 1 = 10$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.</b>	$f(2x) = 10x + 1$ , pentru orice număr real $x$ $f(2x) - 2f(x) = 10x + 1 - 2(5x + 1) = 10x + 1 - 10x - 2 = -1$ , pentru orice număr real $x$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>3.</b>	$x^3 - 2x + 2 = x^3$ , deci $-2x + 2 = 0$ $x = 1$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>4.</b>	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea $A$ sunt 9 numere $n$ pentru care $n + 5$ este multiplu de 10, deci sunt 9 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>5.</b>	$m_{AB} = 4$ și, cum $d \parallel AB$ , obținem $m_d = 4$ Ecuația dreptei este $y - 0 = 4(x - 0)$ , adică $y = 4x$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>6.</b>	$AD = \frac{BC}{2}$ , unde $AD$ este înălțime în triunghiul $ABC$ $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AD \cdot BC}{2} = 4$ , de unde obținem $BC = 4$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$A(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$ $= 4 + 2 + 0 - 0 - 0 + 2 = 8$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>b)</b>	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \\ a & a+1 & -2 \end{vmatrix} = -a^2 + 2a + 8$ , pentru orice număr real $a$ $\det(A(a)) = 0 \Leftrightarrow a = -2$ sau $a = 4$ , deci matricea $A(a)$ este inversabilă dacă și numai dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	Pentru $a = -2$ , soluțiile sistemului de ecuații sunt de forma $(2, -2 - 2\alpha, \alpha)$ , cu $\alpha \in \mathbb{C}$ $x_0 z_0 + y_0 = 2\alpha - 2 - 2\alpha = -2$ , pentru orice soluție $(x_0, y_0, z_0)$ a sistemului de ecuații	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$2 \circ 3 = 2 \cdot 3 + (2^2 - 2)(2^3 - 2) =$ $= 6 + 12 = 18$	<b>3p</b> <b>2p</b>

<b>b)</b>	$x \circ 1 = x \cdot 1 + (2^x - 2)(2^1 - 2) = x + 0 = x$ , pentru orice număr real $x$	<b>2p</b>
	$1 \circ x = 1 \cdot x + (2^1 - 2)(2^x - 2) = x + 0 = x$ , pentru orice număr real $x$ , deci $e = 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”	<b>3p</b>
<b>c)</b>	$x \circ (-x) = -x^2 + 1 - 2 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^{-x} + 4 =$	<b>2p</b>
	$= -x^2 + 1 - 2 \cdot \left(2^x - 2 + \frac{1}{2^x}\right) = 1 - x^2 - 2 \cdot \left(\sqrt{2^x} - \frac{1}{\sqrt{2^x}}\right)^2 \leq 1$ , pentru orice număr real $x$	<b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = 1 + 3(\ln(x+3) - \ln(x-1))' = 1 + \frac{3}{x+3} - \frac{3}{x-1} =$	<b>3p</b>
	$= \frac{x^2 + 2x - 3 + 3x - 3 - 3x - 9}{(x+3)(x-1)} = \frac{x^2 + 2x - 15}{(x+3)(x-1)}$ , $x \in (1, +\infty)$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x} \ln \frac{x+3}{x-1}\right) = 1$	<b>2p</b>
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 \ln \frac{x+3}{x-1}\right) = 0$ , deci dreapta de ecuație $y = x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției $f$	<b>3p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$ ; $f'(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in (1, 3] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(1, 3]$ și $f'(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in [3, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[3, +\infty)$ , deci $f(x) \geq f(3)$ , pentru orice $x \in (1, +\infty)$	<b>3p</b>
	$f(3) = 3 + 3 \ln 3$ , deci $x + 3 \ln \frac{x+3}{x-1} \geq 3 + 3 \ln 3$ , pentru orice $x \in (1, +\infty)$ , de unde obținem $\ln \frac{x+3}{3(x-1)} \geq 1 - \frac{x}{3}$ , pentru orice $x \in (1, +\infty)$	<b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^3 f(x) e^x dx = \int_0^3 (x^2 + 2x) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right) \Big _0^3 =$	<b>3p</b>
	$= \frac{27}{3} + 9 = 18$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_0^1 \frac{f(x)}{x+2} dx = \int_0^1 x(-e^{-x})' dx = x(-e^{-x}) \Big _0^1 - \int_0^1 -e^{-x} dx =$	<b>3p</b>
	$= -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = \frac{e-2}{e}$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x f(t) dt\right)'}{(x^2)'} =$	<b>2p</b>
	$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)e^{-x}}{2} = 1$	<b>3p</b>